978. 一ツノ抽象積分

泉　信一（東北大）

積分論ヲ抽象化スルノニ種々ノ方法ガトラレテ居ルガ其ノウチ一番多ク問題ニサレテルノガ Banach 空間ヲ値域トスル函數ノ積分論デアル。カヽル積分論デハ函數 $f(x)$ ノ（通常ノ意味ノ）絶對値ニ對應スルモノト $\|f(x)\|$ ガトラレル。コノコトハ Banach 空間ヲ値域トスル場合ニハモットモナ事デアルガ，積分論ヲ抽象化スル時ニモット"適當ナ絶對値"ヲモツ空間ニ値域ヲトル方ガ理論ガ円滑ニ進メラレルダラウト思ハレル。ソコデ函數ノ値域トシテ Banach 空間ノ代リニベクトル束ヲトル。ソシテ Bochner 積分[1] ニ相當スルモノヲコノ場合ニ作ツテ兩者ヲ比ベテ見ヨウ。

1. 考フル函數 $f(x)$ ノ定義域ヲ簡單ノタメニ K-元ノユークリッド空間 R_K トシ且ツソノ値域ヲ σ-complete ベクトル束 ∇ ニトル。函數 $f(x)$ ニ對シテ

$$R_K=\sum_{K=1}^{n} E_K,\quad E_i\cap E_j=\textcircled{H}\quad (i\neq j),$$

$$x\in E_K\,(\to)\,f(x)=a_K\in\nabla \quad [2]$$

---

1) Bochner, Fund. Math., 20. 著者 積分論參照

2) $A\cap B$ ハ A ト B トノ共通部分，$\textcircled{H}$ ハ空集合且 $X(\to)Y$ ハ命題 X カラ命題 Y ガ結論サレルコトヲ意味スル。

トナル $\{a_k\}$, $\{E_k\}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ガ存在スルトキ，$f(x)$ ヲ単函数ト云フ。コヽニ各 E_k ハ可測集合トスル。カヽル $f(x)$ ノ積分ヲ

$$\int f(x)\,dx = \sum |E_k|\, a_k$$

ニヨッテ定義スル。

$f(x)$ ガ単函数列ノ殆ンドスベテノ点デノ極限トシテ表ハサレルトキ，$f(x)$ ハ可測デアルト云フ。コヽニ極限ハ relative uniform star convergence ニトル，乃チ $f(x)$ ニ對シテ次ノヤウナ単函数列 $\{f_n(x)\}$ ガ定マリ，任意ノ部分列 $\{f_{n_k}(x)\}$ ニ對シテ殆ンドスベテノ点デ

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqq \lambda_n(x)\, g(x), \quad \lambda_n = \lambda_n(x) \downarrow 0$$

トナル $\{\lambda_n\}$ 及ビ $g(x) \in \nabla$ ガ定ル。

$\{f_n(x)\}$ ガコノ意味デ $f(x)$ ニ収斂スルトキ

$$f_n(x) \to f(x)\,(*) \quad \text{又ハ} \quad (*) \lim f_n(x) = f(x)$$

ト書ク。

然ルトキ

(1, 1)　$f(x)$ ガ可測ナラバ，$|f(x)|$ モ亦可測デアル。

(1, 2)　可測函数ノ一次和モ亦可測デアル。

(1, 4)　$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ガ可測デ且ツ $(*) \lim f_n(x) = f(x)$ ガ存在スルナラバ，$f(x)$ モ亦可測デアル。

2.　$f(x)$ ガ可測デアルトスル。從ッテ殆ンドスベテノ点デ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ トナル単函数列 $\{u_n(x)\}$ ガ存

在スル。コヽニ收斂ハ以上ニ述ベタ意味デアル。特ニ條件

〔2.1〕 $\sum|u_n(x)|$ ガ收斂スルトキニハ

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

〔2.2〕 $\sum S|u_n(x)|dx$ ガ收斂スル。

ヲ滿ス樣ニ $\{u_n(x)\}$ ガトラレル時 $f(x)$ ハ可積分デアルト云フ。[1] ソシテ $f(x)$ ノ積分ヲ

$$\int f(x)\,dx=\sum\int u_n(x)\,dx$$

ニヨッテ定義スル。

之ガ Lebesgue 積分ニナルコトハ容易ニ証明出來ル。[2] 特ニ ∇ ヲ Banach 束トスルトキニハ上ノ意味ノ收斂ハ norm ニ関スル收斂ト同ジニナルカラ Bochner 積分ト一致スル．此ノ場合ニハ $\nabla=(S)$（可測函數ノ無体）ノ場合ガ含マレテルガ，Bochner 積分ノ場合ニハソウデナイ。[3] 乃チ上ノ積分ハ Bochner ノト互ヒニ含ミモシナイシ，含マレモシナイガ，函數空間ノ例トシテ Bochner ノ場合ニハ入ラナイ一ツノ重要ナ場合ガ入ッテ來ル。

---

1) Macneille, Proc. Nat. Acad., 1941 參照.

2) 之ハ Bochner, Proc. Nat. Acad., 1940 ノヨリモ廣イ。

3) 河田敬，全國紙上談話會，1941，一月及ビ Proc. Imp. Acad. 1941 參照。

上ノ積分ハ收斂ヲ(*)－lim ニトッタケレドモ，relative uniform convergence 又ハ order－limit ヲトッテ，∇ ニアル種ノ假定ヲ入レルト以上ノ様ナ方法デ第二及ビ第三ノ積分ヲ定義スル事ガ出來ル。

3．次ニ上ノ積分ニヨル Fourier 解析ニツイテ述ベヨウ。

特ニ K＝1トシ，2πヲ週期トスル可積分函數ダケヲ考ヘル。ソノタメニ ∇ ガ次ノ公理ヲ滿ストスル：

{3.1} 單位 I ガ存在シテ，$\mathrm{I}>0$

$\lambda\mathrm{I}$ ヲ單ニ λ ト書ク.

$f(x)$ ノ Fourier 級數ヲ通常ノ様ニ定義スルコトガ出來ル．之ヲ

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

デ表ハス。

次ニ ∇ ノ元素 f ノ二乘ヲ[1]

{3.2} $f^2\equiv\sup(2\lambda f-\lambda^2;-\infty<\lambda<\infty)$

ヨッテ定義スル．然ルトキ

{3.3} 殆ンドスベテノ x ニ對シテ $f^2(x)$ ガ存在スルナラバ，a^2，$a^2{}_n$，b_n^2 $(n=1,2,\text{-----})$ ガ存在スル

---

1) F. Riesz, Acta de Szeged 7 (1941) Izumi and Nakamura, Proc. Imp. Acad, 1940 參照

更ニ通常ノ方法デ次ノ定理ガ証明サレル。

(3.4) 殆ンドスベテノxニ對シテ$f^2(x)$ガ存在シテ且ツ$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$ガ存在スル(カヽルfヲL^2ニゾクスルト云フ)ナラバ

$$\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$$

之レガ于Bersel ノ不等式デアル。コノ定理ハBochner積分ノ場合ニハ成立シナカッタモノデアル。ソコデBochner積分ノ場合ヨリモFourier解析ヲ行フコトガ出来ル。Bersel ノ不等式ダケデ証明出来ル定理ハFourier級數論ニハ澤山アルカラ，ソレ等ハ大抵成立スル。例ヘバ

(3.5) $f(x) \varepsilon L^2$ 且 $f(x) \varepsilon Lip^{\alpha}$ $(\alpha > 1/2)$ ナラバ

$\sum(|a_n|+|b_n|) < \infty$

(3.6) $f(x) \varepsilon L^2$, $f(x) \varepsilon BV$ (有界変分函數ノ無体) 且 $f(x) \varepsilon Lip^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ ナル時モ$\sum(|a_n|+|b_n|) < \infty$

(3.7) $f(x) \varepsilon C$, $f(0) = f(2\pi)$ 且 $a_0 \geqq 0$, $a_n \geqq 0$, $b_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナラバ, $f(x)$ ノFourier級數ハ一様ニ収斂スル。